Signature $\begin{cases} \text{objets de base} \\ \text{constructeurs} \end{cases}$

(manière de construire de nouveaux objets à partir d'objets déjà construits)

Objets : Tout ce qu'on peut construire en combinant objets de base et constructeurs.

Arité d'un constructeur : nombre d'éléments combinés

Arbres :

- Vide
- Noeud (Ag , Ad)

Arbre Arbre

Liste chainée :

- [ ]
- :: (elt , liste)

Liste

Fonction d'évaluation :

$\longrightarrow$ $eval(n) = n$

$\longrightarrow$ $eval(e_1 \oplus e_2) = eval(e_1) + eval(e_2)$

$\longrightarrow$ $eval(e_1 \otimes e_2) = eval(e_1) \times eval(e_2)$

Considérons le plus petit ensemble A vérifiant la signature générique suivant.

- Soit $n_b \in \mathbb{N}$ tel que $(b_1, \ldots, b_{n_b}) \in A^{n_b}$
- Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ tel que $c(a_1, \ldots, a_n) \in A$ avec c un constructeur d'arité n de A, quelconque.

Alors A est une structure inductive générique.

Théorème : Principe d'induction structurelle

Soit une proposition logique P quelconque paramétrée par un élément de A.

Supposons les propriétés suivantes :

(1) $\forall i \in [\![1, n_b]\!]$, $P(b_i)$

(2) Pour tout constructeur c de A d'arité n quelconque, pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$,

$$P(a_1) \wedge \ldots \wedge P(a_n) \Longrightarrow P(c(a_1, \ldots, a_n))$$

Alors : $\forall a \in A$, $P(a)$.

Notion de taille

On définit inductivement la taille φ d'un élément de A :

- $\forall i \in [\![1, n_b]\!], \quad \varphi(b_i) = 0$
- Soit $a \in A$ tel qu'il existe un constructeur de A d'arité $n \in \mathbb{N}$ et $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ tels que $a = c(a_1, \dots, a_n)$.
  Alors $\varphi(a) = 1 + \max_{i \in [\![1,n]\!]} (\varphi(a_i))$

Autrement dit, φ compte le nombre de constructeurs utilisés pour construire $a \in A$ à partir de $b_1, \dots, b_{n_b}$:

$$a = \underbrace{c(\ c(\dots, c(b_1, \dots, b_n), \dots), \ \dots)}_{\varphi \,=\, \text{nombre de } c}$$

Preuve

Supposons les propriétés (1) et (2) du théorème vérifiées.
Considérons l'ensemble $E \subset A$ tel que
$$\forall a \in A, \quad \neg P(a) \Rightarrow a \in E$$
Supposons par l'absurde que l'ensemble E n'est pas vide. On pose $m = \min_{e \in E} (\varphi(e))$ qui existe car $\{\varphi(e),\ e \in E\} \subseteq \mathbb{N}$.
On a

- Ou bien $\varphi(m) = 0$, donc il existe $i \in [\![1, n_b]\!]$ tel que $m = b_i$. Par définition de E, $\neg P(m)$, or $P(m)$ en vertu de (1).
  Absurde !
- Ou bien $\varphi(m) > 0$ donc par définition de φ, et par contraposée de (2), il existe un constructeur c de A d'arité quelconque et $a \in E$ tq $e = c(\dots, a, \dots)$.
  Or $\varphi(a) = \varphi(e) - 1$, donc $\varphi(a) < \varphi(e)$, or $a \in E$, donc e n'est pas minimal.
  Absurde !

Ainsi, E est vide.
On en déduit que : $\forall a \in A, \ P(a)$. CQFD

On définit la taille d'une expr et son nb d'opérateurs :

taille $\begin{cases} |n| = 1 \\ |e_1 \ \square \ e_2| = 1 + |e_1| + |e_2| \end{cases}$

$$\begin{cases} |e_1 \oplus e_2| = |e_1| + |e_2| \\ |e_1 \otimes e_2| = \text{〃} \end{cases}$$

nb opérateurs
$$\begin{cases} |n|_\varphi = 0 \\ |e_1 \oplus e_2|_\varphi = 1 + |e_1|_\varphi + |e_2|_\varphi \\ |e_1 \otimes e_2|_\varphi = \text{〃} \end{cases}$$

Montrons que $|e| = 1 + |e|_\varphi$ ⚠ Devoir

Cette méthode de preuve est souvent simple à appliquer et on peut avoir confiance en notre raisonnement, bien qu'un peu ennuyeuse.

Remarque
En OCaml, les types algébriques sont un moyen intrinsèque et simple de définir des structures inductives.

Pour définir une fonction $f : A \longrightarrow B$ (A : ensemble d'objets inductifs)
il suffit de
- $\rightarrow$ $f(b)$ pour tout objet de base b
- $\rightarrow$ $f(c(e_1, \dots, e_n))$ pour tout constructeur c d'arité n et tout objet $e_i \in A$.

en utilisant $f(e_i)$

On peut reprendre ceci pour donner le th du principe d'induction
Cf. Isomorphisme Curry-Howard

FAUX !!

Au départ, je voulais donner le principe d'induction puis définir la notion de fonction par analogie en utilisant Curry-Howard.
Problèmes :
- CH n'existe que dans le cadre de la théorie des types
- L'usage unifié est difficilement applicable dans un cadre ensembliste

Usage unifié : Si tu veux tu peux créer un opérateur induction qui te permet de faine des fct rec avec la famille des types constants

Pourquoi ? : Car l'induction dans un contexte ensembliste est à un plan différent des objets mathématiques.

En théorie ensembliste, les propositions qu'on écrit ne sont pas des objets internes à la théorie alors que l'induction travaille sur des objets internes. (Contrairement à TT)

Fonction longueur pour liste :

→ $|[\,]| = 0$

→ $|e :: l| = 1 + |l|$

La fonction longueur est l'unique fonction qui vérifie ces deux équation.

Isomorphisme entre $\mathbb{N}$ et ensemble des listes, utile pour s'assurer de la terminaison d'une fonction récursive qui travaille sur des listes.

On peut montrer qu'une fonction définie récursivement est bien une fonction grâce au principe d'induction en montrant la propriété

« Pour tout $x \in A$, il existe un unique $y \in A$ tq $f(x) = y$ »